Aplicación de Derivadas a la Maximización del Beneficio Económico

Nikole Castro

9 de abril de 2025

1. Introducción

Las derivadas son herramientas fundamentales en economía. Este trabajo tiene como propósito explicar el concepto de derivada, sus distintas interpretaciones y cómo se aplica a la maximización del beneficio económico mediante el uso del lenguaje de programación **R**.

2. Concepto de Derivada

Definición matemática

La derivada de una función $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretaciones

- **Geométrica**: Es la pendiente de la recta tangente a la curva de una función.
- **Física**: Si $f(x)$ representa una posición, su derivada es la velocidad.
- **Económica**: En funciones de beneficio, ingreso o costo, la derivada indica el cambio marginal por unidad adicional del factor.

3. Ejercicio de Maximización de Beneficio

Consideramos una función de producción Cobb-Douglas:

$$Q(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

Con:

$$A = 1, \quad \alpha = 0{,}3, \quad \beta = 0{,}7, \quad p = 10, \quad r = 3, \quad w = 2$$

El beneficio a maximizar es:

$$\Pi(K, L) = p \cdot Q(K, L) - rK - wL$$

4. Código en R

A continuación se muestra el código que permite resolver el problema en R:

```
A <- 1
alpha <- 0.3
beta <- 0.7
p <- 10; r <- 3; w <- 2

Q <- function(K, L) { A * K^alpha * L^beta }

beneficio <- function(x) {
   K <- x[1]
   L <- x[2]
   p * Q(K, L) - r * K - w * L
}

obj_neg <- function(x) -beneficio(x)
grad_obj <- function(x) -numDeriv::grad(beneficio, x)

sol <- nloptr::nloptr(
   x0 = c(1, 1),
   eval_f = obj_neg,
   eval_grad_f = grad_obj,
   lb = c(0, 0),
   opts = list(algorithm = "NLOPT_LD_LBFGS", xtol_rel = 1e-8)
)

K_opt <- sol$solution[1]
L_opt <- sol$solution[2]
max_benef <- beneficio(sol$solution)
```

5. Resultados

- Capital óptimo $K^* \approx$ valor calculado en R
- Trabajo óptimo $L^* \approx$ valor calculado en R
- Beneficio máximo $\Pi^* \approx$ valor calculado en R

6. Interpretaciones

Geométrica

El máximo se encuentra donde la tangente a la función beneficio es horizontal, es decir, donde la derivada es cero.

Física

Se puede pensar que el beneficio es como una energía potencial que se maximiza. Las derivadas indican la dirección en la que el beneficio crece más rápido.

Económica

La condición de primer orden (derivadas parciales igual a cero) implica que el producto marginal de cada factor iguala su precio.

7. Conclusión

Las derivadas son esenciales para entender el comportamiento de las funciones económicas. En este trabajo, se aplicó su concepto al problema de maximización del beneficio, logrando identificar el punto óptimo de producción y el uso eficiente de los factores productivos.